Opvarmningsopgaver

10. november 2012
12:58

Gang parentesen ud:

$(1.5 + \Delta x)^2$

Forkort brøken:

$$\frac{(\Delta x)^2 + 3 \cdot \Delta x}{\Delta x}$$

Gang parentesen ud:

$(1 + \Delta x)^3$

Gang parentesen ud:

$(x_0 + \Delta x)^2$

Forkort brøken

$$\frac{x_0 \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

En linje går gennem punkterne (x_0 , x_0^2) og $(x_0 + \Delta x , (x_0 + \Delta x)^2)$.
Udregn linjens hældningskoefficient (dvs. a-værdien).

En funktion er givet ved $f(x) = x^2 + 1$.
Forklar forskellen på $f(5)$ og $f(x) = 5$.

Differentier disse funktioner:

$f(x) = x^2$

$g(x) = x^{4,1}$

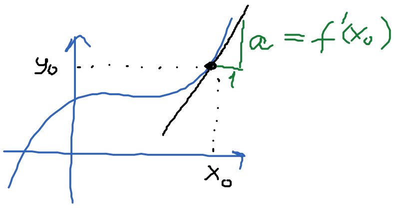
Gang parentesen ud:

$(x_0 + \Delta x)^3$

$h(x) = x^{-2,6}$

Intro til differentialregning

10. november 2012
13:16

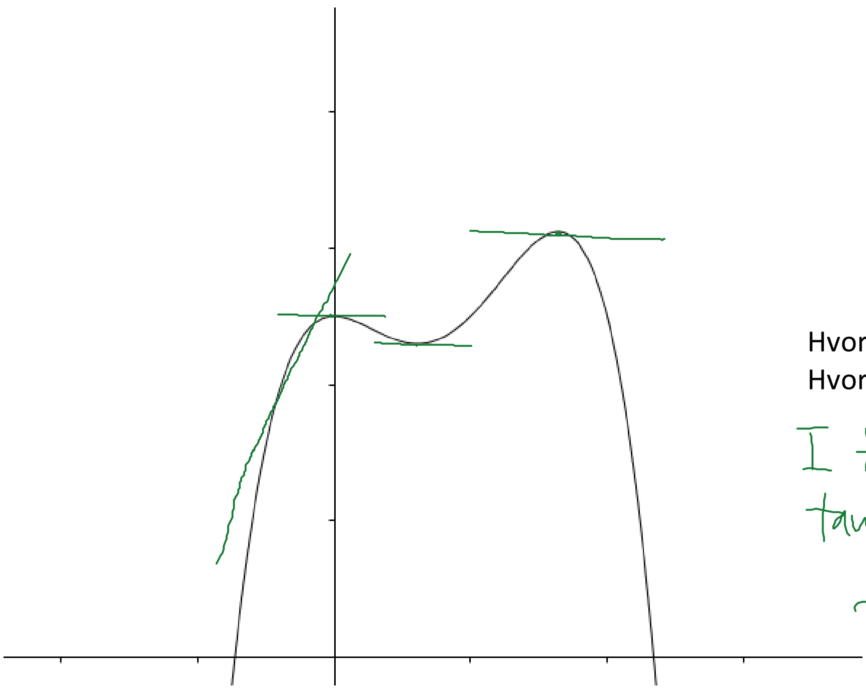


Det overordnede mål
At kunne bestemme *tangenthældningen* i et vilkårligt punkt på grafen for en vilkårlig funktion.

Denne tangenthældning kaldes *funktionens differentialkvotient* i punktet.

Hvis funktionen hedder *f* og punktet hedder (x_0 , y_0), så skrives differentialkvotienten *som* $f'(x_0)$.

Hvorfor er tangenthældninger interessante?



Hvornår er funktionen voksende og aftagende?
Hvor er "toppunkterne"?

I toppunkterne er tangenten vandret, dvs.
$f'(x) = 0$

Eksempler på anvendelser:
- Funktionsundersøgelse
- Optimering

- Mekanik (fart, acceleration m.m.)
- Modellering

Afledte anvendelser:
- Avancerede modeller (f.eks. økonomi eller vejr)
- Arealbestemmelse

Hele den moderne naturvidenskab hviler på differentialregning (blandt andet)

Min første differentialkvotient

10. november 2012
13:07

Mål:
Vi skal finde tangenthældningen i punktet (1.5 , 2.25) for parablen med ligning $y = x^2$.

Terminologi:
Funktionen er $f(x) = x^2$.
Punktet på grafen er (1.5 , f(1.5)) = (1.5 ,1.5^2) = (1.5 , 2.25), dvs. $x_0 = 1.5$.

Første forsøg: Øjemål

1. Tegn grafen for funktionen $f(x) = x^2$ i programmet GeoGebra.
2. Afsæt punktet A(1.5 , 2.25) på parablen.
3. Afsæt et andet punkt B og tegn en linje gennem de to punkter.
4. Flyt linjen ved at flytte på B så linjen bliver tangent til parablen.
5. Aflæs tangentens hældning.

Andet forsøg: Sekant-metoden

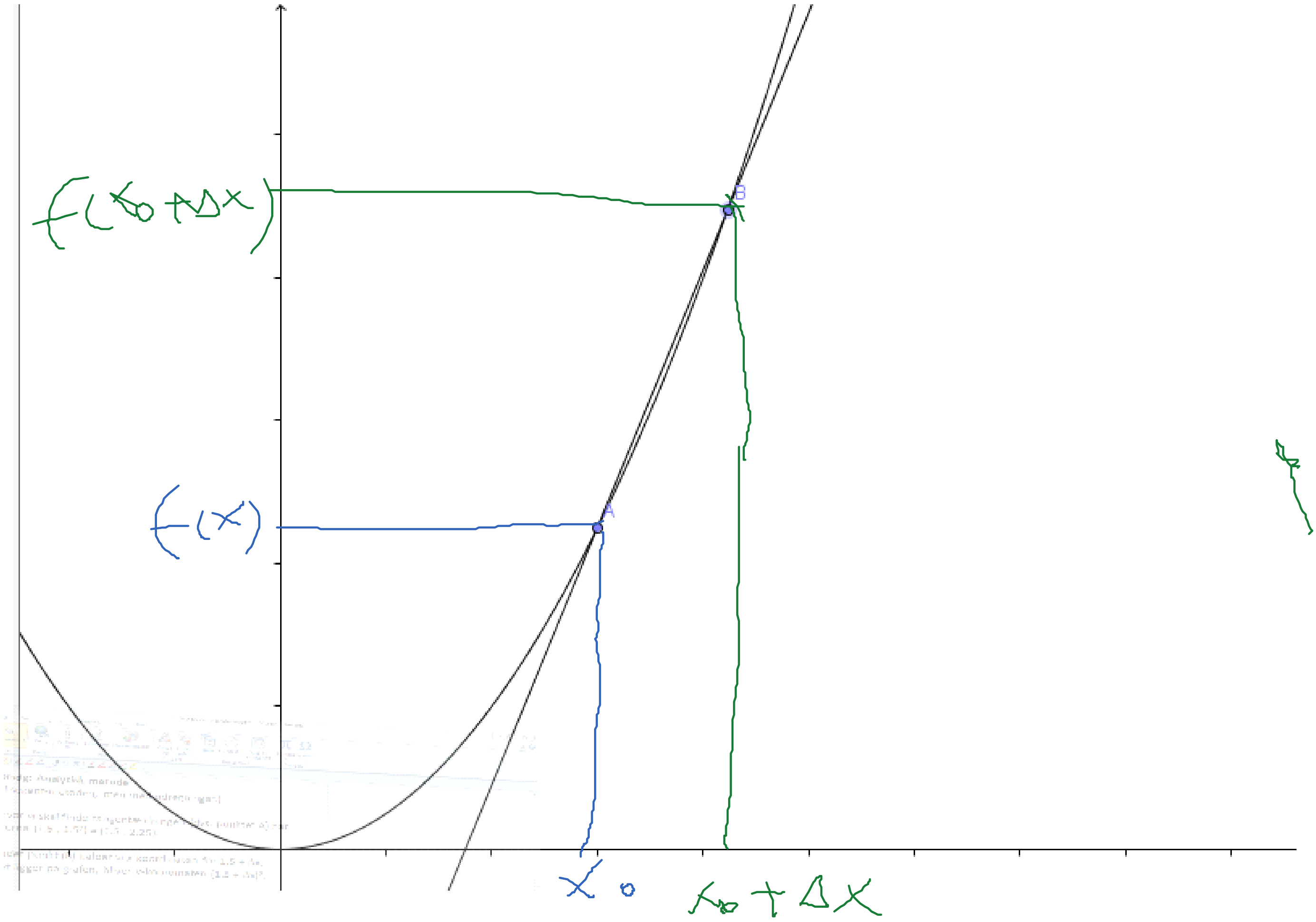
1. Tegn grafen for funktionen $f(x) = x^2$ i programmet GeoGebra.
2. Afsæt punktet A(1.5 , 2.25) på parablen.
3. Afsæt et andet punkt B *på parablen* og tegn en linje gennem de to punkter. Denne linje kaldes en sekant.
4. Flyt sekanten ved at flytte på B.
   Jo tættere B er på A, des tættere er sekanten på at være tangent, dvs. des tættere er sekantældningen på tangenthældningen.

   Man siger, at *grænseværdien* for sekanthældningen er tangenthældningen når punktet B *går mod* punktet A.

Tredje forsøg: Analytisk metode
(svarer til sekant-metoden, men med udregninger.)

Punktet hvor vi skal finde tangentældningen (dvs. punktet A) har koordinaterne $(1.5\ ,\ 1.5^2) = (1.5\ ,\ 2.25)$.

For det andet punkt (B) kalder vi x-koordinaten for $1.5 + \Delta x$.
Da punktet ligger på grafen, bliver y-koordinaten $(1.5 + \Delta x)^2$.



Skærmklip taget: 01-11-2012 09:35

Hældningen for sekanten udregnes:

$$a_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(1.5 + \Delta x)^2 - 2.25}{(1.5 + \Delta x) - 1.5}$$

For at få sekanthældningen til at nærme sig tangenthældningen, skal punktet B nærme sig punktet A.

Dette gør vi ved at vælge værdien af Δx meget tæt på 0.

Vi skriver $\Delta x \to 0$.

Når $\Delta x \to 0$, vil $a_s \to$

Konklusion: Tangenthældningen i punktet (1.5 , 2.25) er 3.
Vi skriver: $f\,'(1.5) = 3$.

Øvelser:
Lad $f\,(x) = x^2$ og benyt både sekant-metoden og den analytiske metode til at bestemme $f\,'(1)$.
(dvs. bestem tangenthældningen i punktet (1 , 1))
Bestem på samme måde $f\,'(2)$.

Øvelse:
Lad $f(x) = x^3$.
Benyt sekant-metoden og GeoGebra til at bestemme $f\,'(1)$ og $f\,'(2)$.

Svær: Prøv om du kan bestemme $f\,'(1)$ ved hjælp af den analytiske metode.

Grafisk differentiation

10. november 2012
13:07

Øvelse 1

- Benyt GeoGebra til at tegne grafen for funktionen $f(x) = x^2$.
- Afsæt et fast punkt på grafen. Notér punktets 1.koordinat (x_0).

Målet med øvelsen er at bestemme tangenthældningen i det faste punkt.

- Afsæt et andet (variabelt) punkt på grafen og tegn en linje (sekant) gennem de to punkter.
- Flyt det variable punkt tæt på det faste punkt og hold øje med sekantens hældningskoefficient. Benyt dette til at bestemme *tangentens* hældningskoefficient i det faste punkt.

Gør det samme med mindst to andre faste punkter.

Øvelse 2

Som øvelse 1, men med andre funktioner:

- $f(x) = x^2 - 2x + 3$
- $f(x) = x^3$
- $f(x) = x^3 + 3$
- $f(x) = \sqrt{x}$ (kvadratroden af x)
- $f(x) = 1/x$

Opsamling

Funktion f	Punkt x_0	Tangenthældning $f'(x_0)$
x^2	2,07	4,13
x^2	-2,2	-4,38
x^2	-0,57	-1,14
x^2-2x+3	1,84	1,7
[illegible]	[illegible]	[illegible]

x^2-2x+3	1,84	1,7
x^2-2x+3	2	2
x^3	0,56	3,18
x^3	-1,2	4,39

Definition af differentialkvotient

10. november 2012
13:05

Definition (analytisk)

1. Funktionen *f* er *differentiabel* i x_0, hvis brøken

   $$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

   har en *grænseværdi* for $\Delta x \rightarrow 0$.

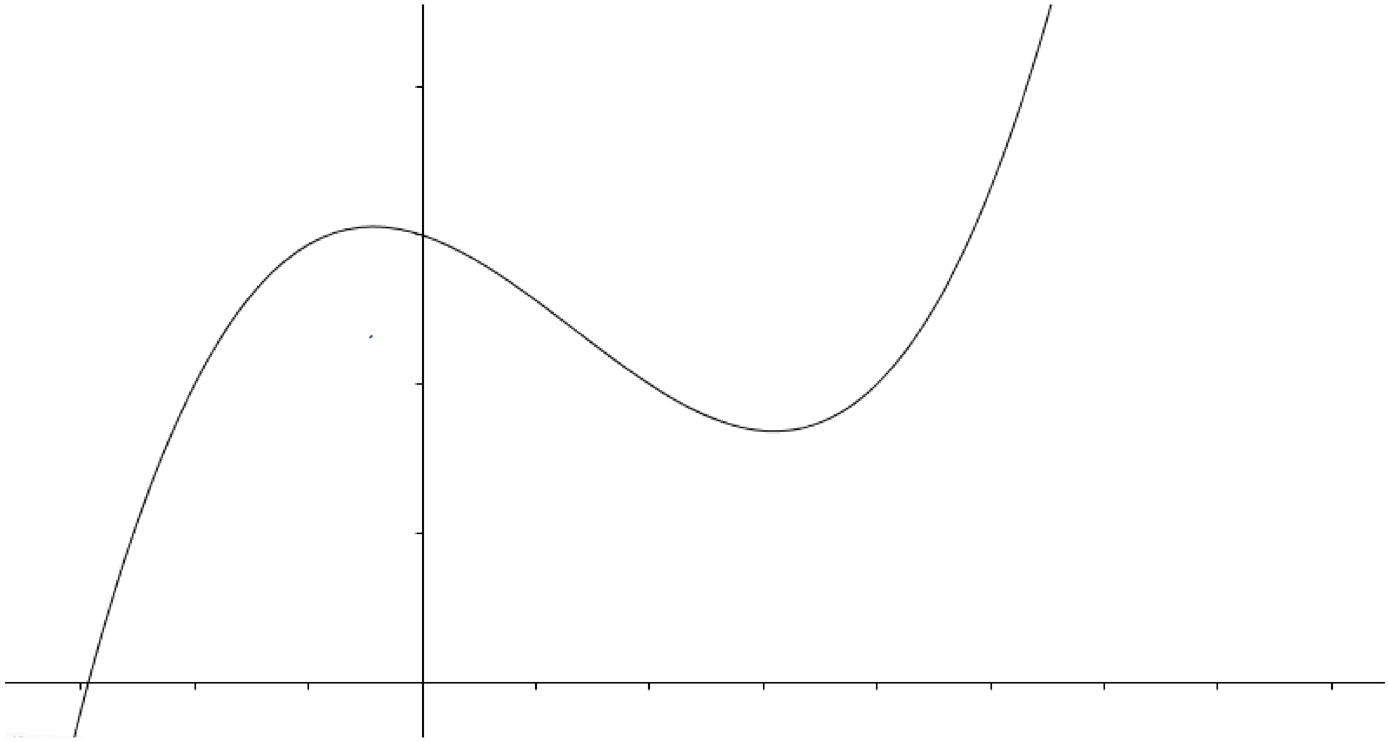
2. *Hvis* grænseværdien findes, så kaldes den *differentialkvotienten* for *f* i x_0 og skrives $f'(x_0)$.

Bemærkninger til definitionen:
Brøken

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

kaldes for *differenskvotienten*.

Grafisk svarer differenskvotienten til sekantens hældning, mens differentialkvotienten svarer til tangentens hældning.



Definitionen antyder, at differenskvotienten ikke altid har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$.
Det er faktisk muligt at konstruere funktioner hvor dette er tilfældet, mere herom senere.